PART4　余りによる分類

例題

(1)　2 つの整数 a，b を 8 で割ったときの余りをそれぞれ 3，6 とする。このとき，次の数を 8 で割ったときの余りを求めよ。

(i)　$a+b$　　(ii)　$a-b$　　(iii)　ab

(2)　n が整数のとき，n^2+4 は 3 で割り切れないことを証明せよ。

Point Pickup

練習

(1)　2 つの整数 a，b を 5 で割ったときの余りをそれぞれ 2，3 とする。このとき，次の数を 5 で割ったときの余りを求めよ。

(i)　$a+b$　　(ii)　$a-2b$　　(iii)　a^2+b^2

(2)　n が整数のとき，n^2+1 を 4 で割った余りは 1 か 2 であることを証明せよ。

第 8 講　PART4　確認問題

1　2つの整数 a，b を7で割ったときの余りをそれぞれ3，5とする。このとき，$a+b$ を7で割ったときの余りは［ア］である。

2　2つの整数 a，b を7で割ったときの余りをそれぞれ3，5とする。このとき，$a-2b$ を7で割ったときの余りは［イ］である。

3　2つの整数 a，b を7で割ったときの余りをそれぞれ3，5とする。このとき，$3ab$ を7で割ったときの余りは［ウ］である。

4 n が整数のとき，n^2+10 は 3 で割り切れないことを証明せよ。

[証明]

すべての整数 n は　$3k$，$3k+1$，$3k+$ エ　（k は整数）のいずれかの形で表される。

$n=3k$ のとき

$$n^2+10=(3k)^2+10=3\left(3k^2+\boxed{オ}\right)+\boxed{カ}$$

$n=3k+1$ のとき

$$n^2+10=(3k+1)^2+10=9k^2+6k+11$$
$$=3\left(3k^2+\boxed{キ}k+\boxed{ク}\right)+\boxed{ケ}$$

$n=3k+$ エ　のとき

$$n^2+10=\left(3k+\boxed{エ}\right)^2+10=9k^2+12k+14$$
$$=3\left(3k^2+\boxed{コ}k+\boxed{サ}\right)+\boxed{シ}$$

よって，n^2+10 を 3 で割った余りは 1 か 2 である。

したがって，n^2+10 は 3 で割り切れない。

[MEMO]

PART4　余りによる分類

例題

(1)　2 つの整数 a，b を 8 で割ったときの余りをそれぞれ 3，6 とする。このとき，次の数を 8 で割ったときの余りを求めよ。

(i)　$a+b$　　(ii)　$a-b$　　(iii)　ab

(2)　n が整数のとき，n^2+4 は 3 で割り切れないことを証明せよ。

(1)　整数 a，b は，整数 k，l を用いて次のように表すことができる。

$$a=8k+3,\quad b=8l+6$$

(i)　$a+b=(8k+3)+(8l+6)=8(k+l)+9=8(k+l+1)+1$

よって，求める余りは 1

(ii)　$a-b=(8k+3)-(8l+6)=8(k-l)-3=8(k-l)-8+5=8(k-l-1)+5$

よって，求める余りは 5

(iii)　$ab=(8k+3)(8l+6)=8^2kl+8\cdot6k+8\cdot3l+18=8(8kl+6k+3l+2)+2$

よって，求める余りは 2

(2)　すべての整数 n は $3k$，$3k+1$，$3k+2$ (k は整数)のいずれかで表される。

$n=3k$ のとき

$$n^2+4=(3k)^2+4=3(3k^2+1)+1$$

$n=3k+1$ のとき

$$n^2+4=(3k+1)^2+4=9k^2+6k+5=3(3k^2+2k+1)+2$$

$n=3k+2$ のとき

$$n^2+4=(3k+2)^2+4=9k^2+12k+8=3(3k^2+4k+2)+2$$

よって，n^2+4 を 3 で割った余りは 1 か 2 である。

したがって，n^2+4 は 3 で割り切れない。

練習

(1)　2 つの整数 a，b を 5 で割ったときの余りをそれぞれ 2，3 とする。このとき，次の数を 5 で割ったときの余りを求めよ。

(i)　$a+b$　　(ii)　$a-2b$　　(iii)　a^2+b^2

(2)　n が整数のとき，n^2+1 を 4 で割った余りは 1 か 2 であることを証明せよ。

(1)　整数 a，b は，整数 k，l を用いて次のように表すことができる。

$$a=5k+2,\quad b=5l+3$$

(i)　$a+b=(5k+2)+(5l+3)=5(k+l+1)$

よって，求める余りは 0

(ii)　$a-2b=(5k+2)-2(5l+3)=5(k-2l)-4=5(k-2l)-5+1=5(k-2l-1)+1$

よって，求める余りは 1

(iii)　$a^2+b^2=(5k+2)^2+(5l+3)^2=25k^2+20k+25l^2+30l+13$

$$=5(5k^2+4k+5l^2+6l+2)+3$$

よって，求める余りは 3

(2)　すべての整数 n は $4k$，$4k+1$，$4k+2$，$4k+3$ (k は整数)のいずれかで表される。

$n=4k$ のとき

$$n^2+1=(4k)^2+1=16k^2+1=4\cdot 4k^2+1$$

$n=4k+1$ のとき

$$n^2+1=(4k+1)^2+1=16k^2+8k+2=4(4k^2+2k)+2$$

$n=4k+2$ のとき

$$n^2+1=(4k+2)^2+1=16k^2+16k+5=4(4k^2+4k+1)+1$$

$n=4k+3$ のとき

$$n^2+1=(4k+3)^2+1=16k^2+24k+10=4(4k^2+6k+2)+2$$

よって，n^2+1 を 4 で割った余りは 1 か 2 である。

第 8 講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] ア：1

[解説]

整数 a, b は，整数 k, l を用いて次のように表すことができる。 [A]

$a=7k+3$, $b=7l+5$

$a+b=(7k+3)+(7l+5)$

$=7(k+l)+8=7(k+l+1)+1$ [B]

よって，求める余りは　**1**

[A]　整数 a を，正の整数 b で割ったときの商を q，余りを r とすると
$a=bq+r$, $0 \leqq r < b$
を満たす整数 q, r がただ 1 通りに定まる。

[B]　$a+b=7q+r$（$0 \leqq r < 7$）の形にする。

2

[正解] イ：0

[解説]

整数 a, b は，整数 k, l を用いて次のように表すことができる。 [C]

$a=7k+3$, $b=7l+5$

$a-2b=(7k+3)-2(7l+5)$

$=7(k-2l-1)$

よって，求める余りは　**0**

[C]　整数 a を，正の整数 b で割ったときの商を q，余りを r とすると
$a=bq+r$, $0 \leqq r < b$
を満たす整数 q, r がただ 1 通りに定まる。

3

[正解] ウ：3

[解説]

整数 a, b は，整数 k, l を用いて次のように表すことができる。 [D]

$a=7k+3$, $b=7l+5$

$3ab=3(7k+3)(7l+5)$

$=3(7^2kl+7\cdot5k+7\cdot3l+15)$

$=7\cdot3(7kl+5k+3l+2)+3$

よって，求める余りは　**3**

[D]　整数 a を，正の整数 b で割ったときの商を q，余りを r とすると
$a=bq+r$, $0 \leqq r < b$
を満たす整数 q, r がただ 1 通りに定まる。

4 **[正解]** エ：2，オ：3，カ：1，キ：2，ク：3，
ケ：2，コ：4，サ：4，シ：2

[解説]

[証明]

すべての整数 n は　$3k$，$3k+1$，$3k+2$　（k は整数）

のいずれかの形で表される。[E]

$n=3k$ のとき

$$n^2+10=(3k)^2+10=3(3k^2+3)+1$$

$n=3k+1$ のとき

$$n^2+10=(3k+1)^2+10$$
$$=9k^2+6k+11$$
$$=3(3k^2+2k+3)+2$$

$n=3k+2$ のとき

$$n^2+10=(3k+2)^2+10$$
$$=9k^2+12k+14$$
$$=3(3k^2+4k+4)+2$$

よって，n^2+10 を 3 で割った余りは 1 か 2 である。

したがって，n^2+10 は 3 で割り切れない。

[E]　k を整数とするとき，すべての整数は正の整数 m で割ったときの余りで
mk，$mk+1$，$mk+2$，……，$mk+(m-1)$
の m 通りにそれぞれ分類することができる。